4. М а л а х о в с к и й В.С. К геометрии касательно оснащенных подмногообразий.-Известия вузов.Матем., 1972,№9,с.54-65.

5. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности, М., Наука,1976.

6. О с т и а н у Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. II.-Тр.геометр.семинара,Т.3.(ВИНИТИ АН СССР),М.,1971, с.95-114.

7. С т о л я р о в А.В. Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов.-Проблемы геометрии.Т.7 (Итоги науки и техн.ВИНИТИ АН СССР).М.,1975,с.117-151.

8. С т о л я р о в А.В. Дифференциальная геометрия полос.-Проблемы геометрии.Т.10 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР),М.,1978,с.25-54.

9. Ч а к м а з я н А.В. Двойственная нормализация.-ДАН Арм.ССР,1959,т.28,№ 4,с.151-157.

10. Cartan E. Les espaces á connexion projective. -Тр.семинара по векторному и тензорному анализу,1937,4,147-159.

11. Cartan E. Leçons sur la théorie des espaces á connexion projective. Paris, 1937.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.13 1982

В.Н.Х у д е н к о

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДВУМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ КОНИК В P_4

В четырехмерном проективном пространстве рассматриваются двумерные многообразия коник Q_1, инцидентных стационарной гиперквадрике Q (многообразия S). Доказано наличие четырех фокальных точек коники $Q_1 \in S$, найдена их геометрическая характеристика.

Отнесем многообразие S к реперу $R=\{A_1,\dots,A_5\}$, где A_1, A_2, A_3 инцидентны двумерной плоскости коники Q_1, а A_4, A_5 вне этой плоскости.

Уравнения квадрики Q и коники Q_1 запишем в виде:

$$a_{\mathcal{J}\mathcal{K}}\, x^{\mathcal{J}} x^{\mathcal{K}} = 0; \tag{1}$$

$$a_{\alpha\beta}\, x^{\alpha} x^{\beta} = 0, \quad x^4 = 0; \ x^5 = 0. \tag{2}$$

Пфаффова система уравнений многообразия S имеет вид:

$$\omega_i^4 = \Gamma_i^{4j}\omega_j, \quad \omega_3^4 = \Gamma_3^{4j}\omega_j, \quad \omega_3^5 = \Gamma_3^{5j}\omega_j,$$

$$d a_{\mathcal{J}\mathcal{K}} - a_{\mathcal{J}\mathcal{I}}\,\omega_{\mathcal{K}}^{\mathcal{I}} - a_{\mathcal{I}\mathcal{K}}\,\omega_{\mathcal{J}}^{\mathcal{I}} = 0, \tag{3}$$

$$(\omega_i \overset{def}{=} \omega_i^5).$$

Здесь индексы принимают следующие значения:

$$\mathcal{J},\mathcal{I},\mathcal{K} = 1, 2, \dots, 5; \quad \alpha,\beta,\gamma = 1,2,3; \quad i,j,k = 1,2. \tag{4}$$

Рассмотрим фокальное многообразие коник $Q_1 \in S$ [2], из (1)-(3) получаем, что оно определяется системой алгебраических уравнений

$$a_{\alpha\beta}\, x^{\alpha} x^{\beta} = 0, \quad x^4 = 0, \quad x^5 = 0, \tag{5}$$

$$\begin{vmatrix} \Gamma_1^{41} x^1 + \Gamma_2^{41} x^2 + \Gamma_3^{41} x^3 & \Gamma_1^{42} x^1 + \Gamma_2^{42} x^2 + \Gamma_3^{42} x^3 \\ x^1 + \Gamma_3^{51} x^3 & x^2 + \Gamma_3^{52} x^3 \end{vmatrix} = 0 .$$

Система (5) определяет в P_4 дискретное многообразие четвертого порядка [1], следовательно, коника Q_1 многообразия S обладает, в общем случае, четырьмя фокальными точками.

Проведем канонизацию репера R, поместив вершины A_1 и A_2 в фокальные точки коники Q_1, вершину A_3 – в полюс прямой $[A_1 A_2]$ относительно коники Q_1, а вершины A_4, A_5 – в точки пересечения поляры плоскости $(A_1 A_2 A_3)$ относительно квадрики Q с этой квадрикой. В результате система (3) приводится к виду:

$$\omega_{\hat i}^4 = \Gamma_1^{4\hat i} \omega_{\hat i}, \quad \omega_3^\xi = \Gamma_3^{\xi k} \omega_k, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k} \omega_k,$$

$$\omega_1^2 = \omega_2^1 = \omega_5^4 = \omega_4^5 = 0, \tag{6}$$

$$\omega_5^{\hat i} = -\frac{a_{54}}{a_{12}} \Gamma_{\hat j}^{4\hat j} \omega_{\hat j}, \quad \omega_\xi^3 = -\frac{a_{54}}{a_{33}} \Gamma_3^{\xi k} \omega_k,$$

$$\omega_4^{\hat i} = -\frac{a_{54}}{a_{12}} \omega_{\hat j}, \qquad \omega_3^{\hat i} = -\frac{a_{33}}{a_{12}} \Gamma_{\hat j}^{3k} \omega_k,$$

$$da_{33} = 2a_{33}\omega_3^3, \quad da_{45} = a_{45}(\omega_5^5 + \omega_4^4),$$

$$da_{12} = a_{12}(\omega_1^1 + \omega_2^2).$$

Многообразия S определяются системой (6) и конечными соотношениями

$$a_{\hat i \hat i} = \Gamma_{\hat j}^{4\hat j} = a_{i3} = a_{\alpha\xi} = a_{44} = a_{55} = 0 . \tag{7}$$

(Здесь $\xi = 4,5$; $\hat i, \hat j = 1,2$, но $\hat i \neq \hat j$ по ним суммирование не производится). Имеет место следующая теорема

Т е о р е м а 1. Для фокальной точки существует направление, вдоль которого касательная к линии, описываемой фокальной точкой, совпадает с касательной к конике Q_1 в этой точке.

Не умаляя общности, возьмем для доказательства фокальную точку A_1. Имеем

$$dA_1 = \omega_1^1 A_1 + \omega_1^3 A_3 + \omega_1^\xi A_\xi .$$

При $\omega_1 = 0$, учитывая (6), получаем

$$dA_1\Big|_{\omega_1=0} = \Gamma_1^{32}\omega_2 A_3 + \omega_1^1\Big|_{\omega_1=0} A_1 . \tag{8}$$

Из (8) следует утверждение теоремы.

Имеет место и обратная

Т е о р е м а 2. Если существует направление, вдоль которого касательная к линии, описываемой некоторой, инвариантной точкой M, инцидентной конике Q_1, совпадает с касательной к конике Q_1 в этой же точке, то точка M является фокальной точкой коники Q_1.

Доказательство теоремы 2 основывается на использовании соотношений (5), (6), (7).

Найдем координаты всех фокальных точек, две из которых (A_1, A_2) найдены. Координаты двух оставшихся фокальных точек $\mathcal{L}_1 (x_1 : y_1 : 1 : 0 : 0)$, $\mathcal{L}_2 (x_2 : y_2 : 1 : 0 : 0)$ можно записать в виде

$$x_{1,2} = \frac{a_{32}}{2a_{12}} \cdot \frac{2m_3}{(-m_2 \pm \sqrt{m_2^2 - 4m_1 m_3})}, \tag{9}$$

$$y_{1,2} = \frac{-m_2 \pm \sqrt{m_2^2 - 4m_1 m_2}}{2m_3},$$

где

$$m_1 = \frac{a_{33}}{2a_{12}} (\Gamma_1^{41}\Gamma_3^{52} - \Gamma_3^{42}),$$

$$m_2 = \frac{a_{33}}{a_{12}} (\Gamma_1^{41} - \Gamma_2^{42}) + (\Gamma_3^{41}\Gamma_3^{52} - \Gamma_2^{42}\Gamma_3^{51}), \tag{10}$$

$$m_3 = \Gamma_3^{41} - \Gamma_3^{51}\Gamma_2^{42} .$$

В заключение приведем уравнение для определения фокальных направлений

$$a_{12}\left[\Gamma_1^{42}\Gamma_2^{42}\left(\Gamma_3^{51}\omega_1+\Gamma_3^{52}\omega_2\right)^2-\left(\Gamma_3^{41}\omega_1^1+\Gamma_3^{42}\omega_2\right)\left(\Gamma_3^{51}\omega_1+\Gamma_3^{52}\omega_2\right)\left(\Gamma_2^{42}+\Gamma_1^{41}\right)+\left(\Gamma_3^{51}\omega_1+\Gamma_3^{52}\omega_2\right)^2\right]-a_{33}\left(\Gamma_1^{41}-\Gamma_2^{42}\right)\omega_1\omega_2=0.$$

Список литературы

1. Ходж В. , Пидо Д. Методы алгебраической геометрии. Т.2,М.,1954.

2. Х у д е н к о В.Н. О фокальных образах многообразий многомерных квадрик.- В кн.:Дифференциальная геометрия многообразий фигур.Вып.9.Калининград,1978,с.118-123.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.13 1982

В.П.Ц а п е н к о

СВЯЗНОСТЬ В РАССЛОЕНИИ,АССОЦИИРОВАННОМ С ГИПЕРКОМПЛЕКСОМ ПАР ФИГУР (P,Q)

В n-мерном проективном пространстве P_n рассмотрим пары (P,Q), состоящие из невырожденной гиперквадрики Q и неинцидентной ей точки P. Отнеся пространство P_n к подвижному реперу $R=\{A_0,A_1,\dots,A_n\}$, зададим точку P разложением $P=x^{i'}A_{i'}$ $(i',j',\dots=0,1,\dots,n)$, а гиперквадрику Q - уравнением $a_{i'j'}y^{i'}y^{j'}=0$, где

$$a_{i'j'}x^{i'}x^{j'}\neq 0,\quad \det[a_{i'j'}]\neq 0 \quad \text{и} \quad a_{i'j'}=a_{j'i'}. \tag{1}$$

Не ограничивая общности рассмотрения, пронормируем координаты $x^{i'}$ и $a_{i'j'}$ так, чтобы $x^0=1$ и $a_{00}=1$. С учетом такой нормировки уравнения стационарности точки P имеют вид:

$$\Delta x^i \stackrel{def}{=} dx^i+x^j\omega_j^i-x^i\omega_0^0-x^ix^j\omega_j^0+\omega_0^i=0, \tag{2}$$

где $i,j,\dots=1,2,\dots,n$. Структурные формы Δx^i [1] точечного проективного пространства P_n образуют вполне интегрируемую систему. Уравнения стационарности гиперквадрики Q с учетом нормировки $a_{00}=1$ имеют вид:

$$\Delta a_{ij}=0,$$

где

$$\Delta a_{ij}=da_{ij}-a_{0(i}\omega_{j)}^0-a_{k(i}\omega_{j)}^k+2a_{ij}\omega_0^0+2a_{ij}a_{0k}\omega_0^k,$$
$$\Delta a_{0j}=da_{0j}-a_{0k}\omega_j^k-a_{kj}\omega_0^k+a_{0j}\omega_0^0-\omega_j^0+2a_{0j}a_{0k}\omega_0^k. \tag{3}$$

Здесь и в дальнейшем круглые скобки в выражениях вида $a_{(i}b_{j)}$ означают удвоенное симметрирование: $a_{(i}b_{j)}=a_ib_j+a_jb_i$.